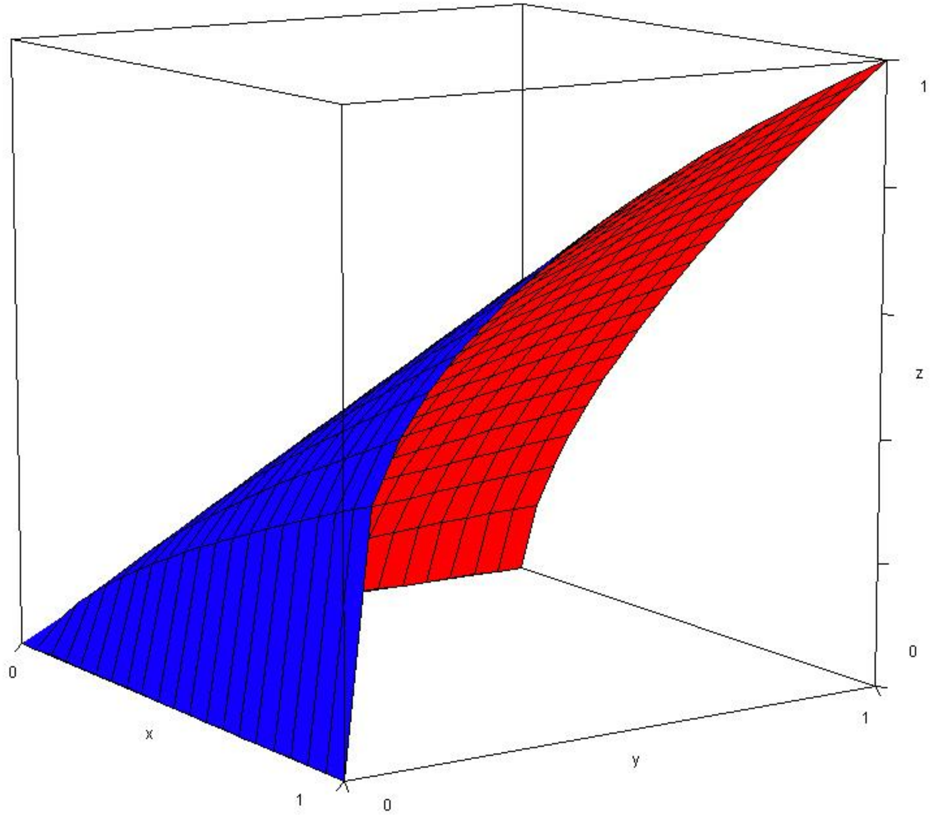
MICROECONOMICS 2018

Mid Sweden University, Sundsvall (Lecture 2)

Peter Lohmander

www.Lohmander.com & Peter@Lohmander.com



NYTT MÖTE:

- **Diskutera Ert förslag till lämpligt problem med kursledaren (Peter Lohmander) och fastställ därefter vilket problem Ni ska lösa.**
- Datum: 2018-01-26 (Fredag)
- Tid: Peter Lohmander finns lokalen 14 – 16.
- Grupperna bokar tid (10 minuter per grupp) inom det intervallet med Peter Lohmander. Bokningen sker direkt efter nu pågående föreläsning.
- Vid mötet skall följande fastslås: **Problemets definition** samt **gruppmedlemmarnas namn**.
- Plats: L403

Erfarenheter från föregående genomgång:

- Vi utgick från ett maximeringsproblem med en målfunktion och en restriktion.
- Vi förutsatte att restriktionen är bindande i optimum.
- Vi definierade ett problem som dels kunde lösas med Lagrange multiplikatormetod och dels på annat sätt.
- Vi vet nu hur en Lagrange-funktion konstrueras från ett maximeringsproblem med ett bivillkor.
- Vi vet hur man bestämmer optimala värden på beslutsvariablerna samt på dualvariabeln (= skuggpriset = shadow price = marginellt kapacitetsvärde) genom att utgå från Lagrange-funktionen.
- Vi vet också hur man kan omvandla ett problem med två beslutsvariabler till ett problem med en beslutsvariabel om man kan lösa ut en av beslutsvariablerna via den bindande restriktionen.

Föregående problem (fortsättning):

- Vi kan därigenom optimera problemet som ett endimensionellt maximeringsproblem.
- Vi kan då bestämma optimalt värde på en beslutsvariabel genom förstaordningsvillkoret för optimum.
- Vi kan kontrollera andraderivatan av målfunktionen med avseende på den fria beslutsvariabeln och därigenom kontrollera att vi har ett maximum.
- Sedan kan vi bestämma den andra beslutsvariabelns optimala värde genom att vi känner till den första beslutsvariabelns optimala värde samt den bindande restriktionen.

Föregående problem (fortsättning):

- Vi kan bestämma det optimala målfunktionsvärdet genom att sätta in beslutsvariablernas optimerade värden i målfunktionen.
- Vi kan bestämma dualvariabeln (= skuggpriset = shadow price = marginella kapacitetsvärdet) genom att derivera det optimala målfunktionsvärdet m.a.p. ”kapaciteten” (Resursmängden) i den bindande restriktionen.
- Vi vet också hur vi kan använda ett optimeringsprogram (Lingo) för att numeriskt lösa ett typiskt Lagrangeproblem.

Exempel på optimering med respektive utan Lagrangefunktion: *Ekonomiskt optimal areal*

$$\max_{x,y} Z = xy$$

$$s.t.$$

$$2x + 2y \le K$$

1. Målfunktionens egenskaper?
2. Om man inte hade bivillkoret; Hur skulle man då hantera detta maximeringsproblem? Förstaordningsvillkor? Andraordningsvillkor för maximum?
3. Restriktionens egenskaper?
4. Optimering utan Lagrange-funktion. Hur kan man hantera bivillkoret?
5. Optimala värden på x och y via förstaordningsvillkor?
6. Optimalt värde på Z?
7. Max eller min? Unikt eller ej?
8. Derivatan av optimal värde på Z m.a.p. K?
9. Optimering med hjälp av Lagrangefunktion.
10. Kuhn-Tucker-villkoren.
11. Tolkning av marginella kapacitetsvärdet.

```
!Numerical solution via Lingo;
!Peter Lohmander 180120;

model:
z = x*y;
L=10;
max = z;
[Constraint] 2*x+2*y <= L;
end
```

Lingo 14.0 - Lingo Model - Lingo1

File Edit LINGO Window Help

Lingo Model - Lingo1

```
!Numerical solution via Lingo;
!Peter Lohmander 180120;

model:
z = x*y;
L=10;
max = z;
[Constraint] 2*x+2*y <= 10;
end
```

```
model:
z = x*y;
L=10;
max = z;
[Constraint] 2*x+2*y <= L;
end
```

Variable	Value	Reduced Cost
Z	6.250000	0.000000
X	2.500000	0.000000
Y	2.500000	0.000000
L	10.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	6.250000	1.000000
CONSTRAINT	0.000000	1.250000

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                              6.250000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               5
  Total solver iterations:                            26
  Elapsed runtime seconds:                          0.29

  Model Class:                                       NLP

  Total variables:                    3
  Nonlinear variables:                2
  Integer variables:                  0

  Total constraints:                  3
  Nonlinear constraints:              1

  Total nonzeros:                     6
  Nonlinear nonzeros:                 2
```

Ytterligare erfarenheter från tidigare genomgång:

- Vi vet hur vi finner ett maximum (eller minimum) i ett problem med två beslutsvariabler utan bindande restriktion.
- Då krävs att förstaordningsvillkoren är uppfyllda. Från dessa kan vi ibland lösa ut optimala värden på beslutsvariablerna.
- Sedan krävs att andraordningsvillkoren är uppfyllda (för maximum alternativt minimum).
- Vi gick igenom dessa andraordningsvillkor för maximum och minimum. Vi härledde dessa villkor från grunden.

Ytterligare erfarenheter från tidigare genomgång:

- Vi fann att **”det första maximeringsproblemet med en bindande restriktion”** inte har ett maximum som går att beräkna om vi inte skulle ha en bindande restriktion.
- Vi studerade vad som krävs för att ett problem med två fria beslutsvariabler utan bindande bivillkor ska ha ett maximum (eller minimum) som går att beräkna.

Ekonomisk optimal produktion i ett tillverkande företag med två fabriker

- ***Här ska vi samtidigt få fördjupad förståelse för fundamentala ekonomiska principer i tillverkande företag samt Lagrange multiplikatormetod.***
- Vi har två fabriker som producerar varsin produkt. Vi kan exempelvis tänka oss produktion av två olika typer av pappersmassa, två typer av oljebaserade produkter, två typer av malmbaserade produkter o.s.v..
- Bägge fabrikerna behöver en råvara som företaget har tillgång till. Det är därför viktigt att fördela denna råvara optimalt mellan fabrikerna.
- Åtgångstalen (mängd råvara per enhet producerad vara) är a1 och a2.
- Total mängd råvara som företaget kan använda är K.

Ekonomisk optimal produktion i ett tillverkande företag med två fabriker (forts.)

Produktionsvolymerna i de bägge fabrikerna kallas x1 och x2.

Priserna, p1 och p2, på dessa produkter är beroende av hur mycket som produceras (och allt säljes). (Företaget är en stor producent på marknaden och produktionsvolymerna påverkar marknadspriserna).

De rörliga kostnaderna per enhet är c1 och c2.

Fasta kostnader i fabrikerna är F1 och F2.

Vi förutsätter inledningsvis att fabrikernas produktionskapaciteter inte är begränsande för den optimala lösningen. (Detta antagande ska vi senare ändra på.)

Optimering med/utan Lagrangefunktion: *Ekonomiskt optimal produktion i två fabriker.*

$$\boxed{\begin{aligned} &\max \pi = \pi_1(x_1) + \pi_2(x_2) \\ &s.t. \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \le K \end{aligned}}$$

$$\pi_j = p_j(x_j)x_j - c_j x_j - F_j$$

$$p_j(x_j) = m_j - n_j x_j$$

1. Målfunktionens egenskaper?
2. Om man inte hade bivillkoret; Hur skulle man då hantera detta maximeringsproblem? Förstaordningsvillkor? Andraordningsvillkor för maximum?
3. Restriktionens egenskaper?
4. Optimering utan Lagrange-funktion. Hur kan man hantera bivillkoret?
5. Optimala värden via förstaordningsvillkor?
6. Optimalt värde på målfunktionen?
7. Max eller min? Unikt eller ej?
8. Derivatan av optimalt målfunktionsvärde m.a.p. K?
9. Optimering med hjälp av Lagrangefunktion.
10. Kuhn-Tucker-villkoren.
11. Grafiska lösningar?
12. Tolkning av marginella kapacitetsvärdet.

$$\max \pi = \pi_1(x_1) + \pi_2(x_2)$$

$$s.t. \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leq K$$

$$\Downarrow$$

$$L = \pi(x_1, x_2) + \lambda(K - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)$$

$$\max \pi = \pi_1(x_1) + \pi_2(x_2) + \ldots + \pi_n(x_n)$$

$$s.t.$$

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \leq K_1$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \leq K_2$$

$$\ldots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \leq K_m$$

Generalisering med fler fabriker och resurser

$$L = \pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (K_i - \alpha_{i1}x_1 - \alpha_{i2}x_2 - \ldots \alpha_{in}x_n)$$

Kuhn-Tucker –villkoren:

$$x_j \geq 0 \qquad \frac{dL}{dx_j} \leq 0 \qquad x_j \frac{dL}{dx_j} = 0$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad \frac{dL}{d\lambda_i} \geq 0 \qquad \lambda_i \frac{dL}{d\lambda_i} = 0$$

Lösningar av problemet med två fabriker

- Optimera verksamheten i företaget med två fabriker.
- Bestäm först formlerna för optimala värden på x1, x2 och lambda via den generella problemformuleringen under förutsättning att restriktionen är bindande.
- Tolka de generella optimala lösningarna så att de blir ekonomiskt begripliga.
- Bestäm formlerna för optimala värden på x1 och x2 samt lambda under förutsättning att det inte är optimalt att använda hela resursmängden.
- Tolka de generella optimala lösningarna så att de blir ekonomiskt begripliga.

Lösningar av problemet med två fabriker (forts):

- Optimera verksamheten i företaget med två fabriker.

Antag följande:

p1 = 100-2*x1, p2 = 100-2*x2,

c1 = 10, c2 = 10,

F1 = 0, F2 = 0,

K=50,

a1 =2, a2 = 2.

- Bestäm optimala värden på x1, x2 och lambda via Lagrange multiplikatormetod. Vad säger Kuhn-Tuckervillkoren om lösningen?
- Bestäm optimala värden på x1, x2 och lambda via en graf.
- Lös problemet även via Lingo och kontrollera resultaten.

```
!Numerical solution 2 via Lingo;
!Peter Lohmander 180120;

model:
z = (100-2*x1)*x1-10*x1 + (100-2*x2)*x2-10*x2;
K=50;
max = z;
[Constraint] 2*x1+2*x2 <= K;
end
```

```
model:
z = (100-2*x1)*x1-10*x1 + (100-2*x2)*x2-10*x2;
K=50;
max = z;
[Constraint] 2*x1+2*x2 <= K;
end
```

Variable	Value	Reduced Cost
Z	1625.000	0.000000
X1	12.50000	0.000000
X2	12.50000	0.000000
K	50.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	1.000000
2	0.000000	20.00000
3	1625.000	1.000000
CONSTRAINT	0.000000	20.00000

Lösningar av problemet med två fabriker (forts):

- Optimera verksamheten i företaget med två fabriker.

Antag följande:

$p1 = 100-2*x1$, $p2 = 100-2*x2$,

$c1 = 10$, $c2 = 10$,

$F1 = 0$, $F2 = 0$,

$K=100$,

$a1 =2$, $a2 = 2$.

- Bestäm optimala värden på x1, x2 och lambda via Lagrange multiplikatormetod. Vad säger Kuhn-Tuckervillkoren om lösningen?
- Bestäm optimala värden på x1, x2 och lambda via en graf.
- Lös problemet även via Lingo och kontrollera resultaten.

```
!Numerical solution 2 via Lingo;
!Peter Lohmander 180120;

model:
z = (100-2*x1)*x1-10*x1 + (100-2*x2)*x2-10*x2;
K=100;
max = z;
[Constraint] 2*x1+2*x2 <= K;
end
```

```
model:
z = (100-2*x1)*x1-10*x1 + (100-2*x2)*x2-10*x2;
K=100;
max = z;
[Constraint] 2*x1+2*x2 <= K;
end
```

Variable	Value	Reduced Cost
Z	2025.000	0.000000
X1	22.50000	0.000000
X2	22.50000	0.000000
K	100.0000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	2025.000	1.000000
CONSTRAINT	10.00000	0.000000

Lösningar av problemet med två fabriker (forts):

- Optimera verksamheten i företaget med två fabriker.
- Kompletterande information: Fabrik 1 har begränsad produktionskapacitet. Den fabriken kan därför ej producera mer än 10 enheter.

Antag följande:

p1 = 100-2*x1, p2 = 100-2*x2,

c1 = 10, c2 = 10,

F1 = 0, F2 = 0,

K=50,

a1 =2, a2 = 2.

- Bestäm optimala värden på x1, x2 och lambda via Lagrange multiplikatormetod. Vad säger Kuhn-Tuckervillkoren om lösningen?
- Bestäm optimala värden på x1, x2 och lambda via en graf.
- Lös problemet även via Lingo och kontrollera resultaten.

```
model:
z = (100-2*x1)*x1-10*x1 + (100-2*x2)*x2-10*x2;
K=50;
max = z;
[Constraint] 2*x1+2*x2 <= K;
[Fabrik_1] x1 <= 10;
end
```

```
model:
z = (100-2*x1)*x1-10*x1 + (100-2*x2)*x2-10*x2;
K=50;
max = z;
[Constraint] 2*x1+2*x2 <= K;
[Fabrik_1] x1 <= 10;
end
```

Variable	Value	Reduced Cost
Z	1600.000	0.000000
X1	10.00000	0.000000
X2	15.00000	0.000000
K	50.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	1.000000
2	0.000000	15.00000
3	1600.000	1.000000
CONSTRAINT	0.000000	15.00000
FABRIK_1	0.000000	20.00000

Egna studier:

Följande studier ger en bra förståelse för hur dessa saker hänger ihop.
Övning ger färdighet!

- Undersök hur de optimala lösningarna ändras om exempelvis följande ändringar i problemet äger rum:
- Nivån för hela prisfunktionen för produkt 1 ökas.
- Lutningen på prisfunktionen för produkt 1 ökas.
- Åtgångstalet a1 ökas.
- Produktionskapaciteterna i bägge fabrikerna begränsas.

Observationer och slutsatser

- Man kan vanligen inte vara säker på att en viss restriktion är bindande i optimum utan att kontrollera lösningen med Kuhn-Tuckervillkoren.
- Man kan vanligen inte heller vara säker på att det är optimalt att låta en viss beslutsvariabel (exempelvis produktionsvolymen eller konsumtionen av en viss vara) antaga ett strikt positiv värde utan att gå igenom lösningen med Kuhn-Tuckervillkoren.
- I problem med många beslutsvariabler och restriktioner finns det ett mycket stort antal ”möjliga ekvationssystem”. Något av dessa ekvationssystem ger optimal lösning. Kuhn-Tuckervillkoren är avgörande.
- I problem med kvadratisk målfunktion och linjära restriktioner kan kvadratisk programmering ge optimal lösning till problemet och ta hänsyn till alla Kuhn-Tuckervillkor i ett ändligt antal iterationer.
- I problem med linjär målfunktion och linjära restriktioner kan linjär programmering ge optimal lösning till problemet och ta hänsyn till alla Kuhn-Tuckervillkor i ett ändligt antal iterationer.
- I ekonomisk teori antages ofta att vi vet vilka restriktioner som är bindande i optimum och vilka beslutsvariabler som ska ha positiva värden. Var alltid medveten om detta när ekonomiska teorier studeras. När Du själv ska analysera ett problem kan Du inte utgå från att Du vet något om detta.
- **Studera alltid verkliga problem med hänsyn till verkliga förutsättningar.**